

MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS Y SU APLICACIÓN A PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA

A. Zozaya S.

7 de agosto de 2004

Resumen

En este documento se explora el método de las diferencias finitas y su aplicación a problemas de electrostática con valores en la frontera en dominios rectangulares bidimensionales.

Índice

Índice	1
1. Introducción	2
2. Tipos de ecuaciones diferenciales	2
2.1. Condiciones iniciales y de borde,	3.
2.1.1. Forma de las condiciones iniciales	3
2.1.2. Forma de las condiciones de contorno	3
3. El problema	3
3.1. Muestreo de la región: construcción de la malla de puntos,	4.—3.2. Muestreo temporal,
4.—3.3. Aproximación de los diferenciales por diferencias finitas y de las derivadas por cocientes de diferencias finitas,	5.
4. Aplicación del método FD para el calculo del potencial y el campo eléctrico en dominios rectangulares	7
4.1. Problema de Dirichlet,	7.
A. Secciones cónicas	11
B. Series de Taylor	13
Referencias	15

1. Introducción

El método de las diferencias finitas (abreviado DF en castellano) consiste en aproximar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias obtenidas usualmente a partir del truncamiento de series de Taylor. El conjunto de ecuaciones en diferencias resultante constituye un sistema de ecuaciones lineales, el cual se puede resolver numéricamente en un computador obteniendo una solución aproximada del problema original.

Si el problema carece de dependencia temporal el método se denomina simplemente método de las diferencias finitas (abreviado en inglés FD –*Finite Difference*–). Si el problema incluye la variable temporal se denomina método de las diferencias finitas en el dominio temporal (abreviado en inglés FDTD –*Finite Difference Time Domain*–). Aunque en las secciones iniciales de este artículo nos referimos a ambos, nos ocuparemos principalmente del método FD en el resto del documento.

2. Tipos de ecuaciones diferenciales

En este documento se revisarán los aspectos más relevantes del método de las diferencias finitas relativo a ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales. Estas ecuaciones pertenecen a la familia de ecuaciones diferenciales cuadráticas de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}}_{\text{forma cuadrática}} u + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} u + Fu = G \quad (1)$$

donde A, B, C, D, E, F y G son funciones de x (espacio) y de t (tiempo), las cuales son continuas en cierto subespacio R en el dominio (x, t) .

Aún cuando la ecuación (1) representa un problema unidimensional en el espacio, las conclusiones que iremos construyendo podrán extenderse al caso de problemas tridimensionales en el espacio.

Dependiendo del signo del determinante de la matriz cuadrada de la forma cuadrática de la ecuación (1) se obtiene una de las siguientes categorías de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \begin{cases} > 0, & \text{ecuación diferencial elíptica;} \\ = 0, & \text{ecuación diferencial parabólica;} \\ < 0, & \text{ecuación diferencial hiperbólica.} \end{cases} \quad (2)$$

Esta denominación se debe a la similitud de la ecuación (1) con la ecuación general de las secciones cónicas (ver apéndice A en la página 11).

Una forma explícita de la ecuación (1) se obtiene resolviendo el producto de matrices:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \quad (3)$$

1. Ejemplo de ecuación diferencial elíptica: la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = f \quad (4)$$

2. Ejemplo de ecuación diferencial parabólica:

3. Ejemplo de ecuación diferencial hiperbólica: la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

2.1. Condiciones iniciales y de borde

En un problema típico se cuenta con cierta región espacial Ω y su contorno $\partial\Omega$ y ciertas condiciones de borde e iniciales.

2.1.1. Forma de las condiciones iniciales

Las condiciones iniciales se refieren a conocer en $t = 0$ el valor de la función incognita u para todos los puntos de la región espacial Ω :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (6)$$

2.1.2. Forma de las condiciones de contorno

Las condiciones de borde se refieren a conocer para todos los instantes de tiempo el valor de u , o de su derivada espacial $\partial u / \partial x$ ¹, o de una combinación de ambas en la frontera $\partial\Omega$ de Ω :

$$au(x, t) + b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = c, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t, \quad \begin{cases} b = 0, & \text{Condiciones de Dirichlet;} \\ a = 0, & \text{Condiciones de Neumann;} \\ c = 0, & \text{Condiciones de Robin.} \end{cases} \quad (7)$$

3. El problema

La resolución de un problema definido por la ecuación (3) y el conjunto de condiciones iniciales (6) y de borde (7) consiste en hallar una función $u = u(x, t)$ que sea continua en $\Omega + \partial\Omega$, que sea diferenciable dos veces en Ω , que satisfaga en Ω la ecuación (3), y que cumpla con las condiciones iniciales (6) y de borde (7).

El primer paso del método de las diferencias finitas consiste en seleccionar (muestrear) un conjunto de puntos discretos (malla de puntos) de la región Ω , un subdominio temporal de

¹Para el caso tridimensional se debe conocer la derivada respecto de la normal a la superficie frontera: $\nabla u \cdot \mathbf{a}_n|_{\partial\Omega}$

observación y un intervalo Δt de muestreo temporal. El segundo paso consiste en aproximar la ecuación diferencial mediante una ecuación en diferencias. El tercer paso comprende evaluar la ecuación en diferencias en cada uno de los puntos de la malla y del subdominio temporal seleccionado. Finalmente, se procede a resolver numéricamente el sistema de ecuaciones lineales que resulta.

3.1. Muestreo de la región: construcción de la malla de puntos

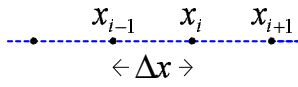


Figura 1: Dominio espacial unidimensional

El conjunto de puntos discretos $\{x_i\}$ se puede construir seleccionando una separación espacial Δx constante, lo cual no es restrictivo, de modo que $x_i = i\Delta x$, para el caso unidimensional (ver figura 1). En la figura 2(a) se extiende el razonamiento anterior al caso bidimensional. Para el caso tridimensional –ver figura 2(b)– se escoge un *paso* para cada dirección, de forma que:

$$u(x_i, y_j, z_k) = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (8)$$

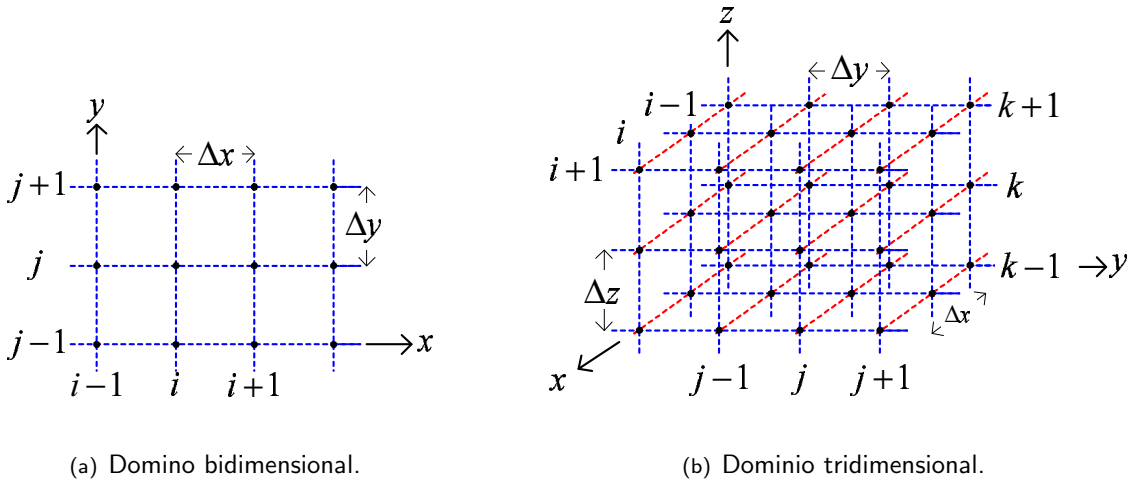


Figura 2: Dominios espaciales de orden superior.

3.2. Muestreo temporal

Si discretizamos el tiempo tomando un intervalo de muestreo Δt , resulta:

$$u(x_i, y_j, z_k, t_n) = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (9)$$

Para ahorrar escritura se suele emplear la siguiente notación [1]:

$$u^n(i, j, k) \equiv u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (10)$$

3.3. Aproximación de los diferenciales por diferencias finitas y de las derivadas por cocientes de diferencias finitas

Tomando como referencia la figura 1, poniendo $\Delta x = h$, y asumiendo que la función $u(x)$ posee derivadas de cualquier orden, es posible expandir $u(x_{i+1}) \equiv u(x_i + h)$ y $u(x_{i-1}) \equiv u(x_i - h)$ en sendas series de Taylor a partir del valor de la función $u(x)$ y sus derivadas en x_i (ver apéndice B en la página 13):

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{h^3}{6} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x_i} + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{x_i}}_{\mathcal{O}(h^4)} \quad (11)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{h^3}{6} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x_i} + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{x_i}}_{\mathcal{O}(h^4)} \quad (12)$$

donde $\mathcal{O}(h^n)$ es la notación empleada para indicar el *orden del error* que se comete cuando el valor deseado, por ejemplo $u(x_i + h)$ en la ecuación (11), es aproximado por una cantidad finita de elementos de la serie suprimiendo los términos a partir de n inclusive, asumiendo que h es muy pequeño (?). La potencia más pequeña de h de los términos suprimidos determina el orden del error porque los términos siguientes son despreciables bajo la premisa de que $h \ll 1$. Si llamamos $e(h)$ al error, siendo el orden del error de $\mathcal{O}(h^n)$, se puede demostrar que:

$$e(h) = \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{\xi}$$

donde $\xi \in [x, x + h]$ para $h > 0$ –ecuación (11)– o $\xi \in [x - |h|, x]$ para $h < 0$ –ecuación (12)– [2].

Una expresión más compacta de las ecuaciones (11) y (12) se obtiene poniendo $x_i = x$, $\frac{du}{dx} \equiv u'$ y $\frac{d^n u}{dx^n} \equiv u^{(n)}$:

$$\begin{aligned} u(x + h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{h^n}{n!}u^{(n)}(x) \\ &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u(x - h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n!}u^{(n)}(x) \\ &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (14)$$

De las ecuaciones (13), (14) y de su combinación obtenemos las aproximaciones de primero y segundo orden siguientes, respectivamente, para la primera derivada de la función $u(x)$:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} u^{(n)}(x) \\
&= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
&\approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{n-1}}{n!} u^{(n)}(x) \\
&= \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
&\approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \sum_{\substack{n=3 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} u^{(n)}(x) \\
&= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\
&\approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}
\end{aligned} \tag{17}$$

Las ecuaciones (15), (16) y (17) se conocen como fórmulas de aproximación en diferencias *hacia adelante*, *hacia atrás* y *central* de la primera derivada de $u(x)$, respectivamente.

De modo análogo, combinando apropiadamente las ecuaciones (13) y (14), se obtiene una aproximación en diferencias centradas de la segunda derivada de $u(x)$:

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h) + 2u(x)}{h^2} - \sum_{\substack{n=4 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{2h^{n-2}}{n!} u^{(n)}(x) \\
&= \frac{u(x+h) - u(x-h) + 2u(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\
&\approx \frac{u(x+h) - u(x-h) + 2u(x)}{h^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

El desarrollo en serie de Taylor se extiende en modo natural a funciones de varias variables. Sea, por ejemplo, $u = u(x, y)$, escribiremos:

$$\left. \begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)} + \mathcal{O}(h^3) \\ u(x-h, y) &= u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)} + \mathcal{O}(h^3) \\ u(x, y+h) &= u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} + \mathcal{O}(h^3) \\ u(x, y-h) &= u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

A partir del conjunto de ecuaciones (19) podemos deducir una aproximación en diferencias de segundo orden para el laplaciano de $u(x, y)$. En primer lugar sumamos todas las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) &= \\ 4u(x, y) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} + \mathcal{O}(h^4) & \quad (20) \end{aligned}$$

y luego despejamos $\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} &= \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ &\approx \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} \end{aligned} \quad (21)$$

4. Aplicación del método FD para el calculo del potencial y el campo eléctrico en dominios rectangulares

En esta sección procederemos a aplicar el método de la diferencias finitas para calcular el potencial $V(x, y)$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}(x, y)$ en dominios rectangulares.

4.1. Problema de Dirichlet

Sea dado el siguiente problema con valores en la frontera de Dirichlet –ver figura 3(a)–:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \\ V(x, 0) = V_1 \quad V(a, y) &= V_2 \\ V(x, b) = V_3 \quad V(0, y) &= V_4 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

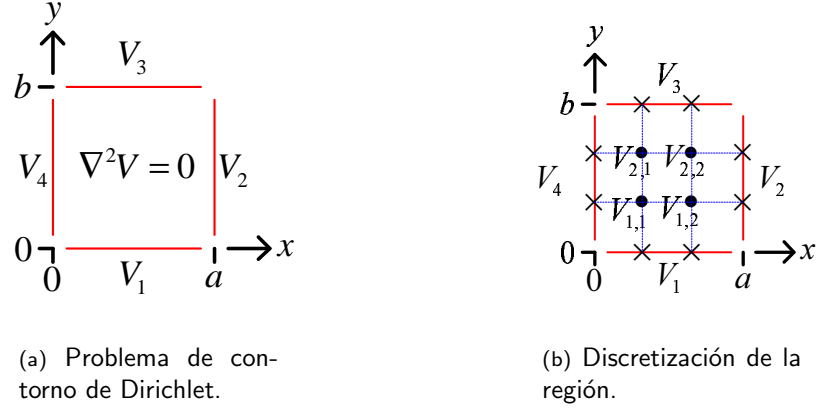


Figura 3: Problema de contorno de Dirichlet y discretización del dominio. Los \bullet representan puntos interiores al dominio; las \times puntos sobre la frontera.

cuya solución analítica está disponible en varios libros [3, 4].

Para ilustrar la aplicación del método tomamos un número limitado de puntos dentro del dominio presentado en la figura 3(a) y los ordenamos de forma natural [5] como se muestra en la figura 3(b); luego evaluamos en tales puntos el laplaciano $\nabla^2 V$ aproximado por la ecuación (21):

$$\nabla^2 V|_{i,j} \approx \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j}}{h^2} \quad (23)$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} V_{1,1} - \frac{1}{4}(V_{2,1} + V_{1,2} + V_1 + V_4) &= 0 \\ V_{1,2} - \frac{1}{4}(V_{1,1} + V_{2,2} + V_1 + V_2) &= 0 \\ V_{2,1} - \frac{1}{4}(V_{1,1} + V_{2,2} + V_3 + V_4) &= 0 \\ V_{2,2} - \frac{1}{4}(V_{2,1} + V_{1,2} + V_2 + V_3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} V_{1,1} - \frac{1}{4}V_{1,2} - \frac{1}{4}V_{2,1} &= \frac{1}{4}(V_1 + V_4) \\ -\frac{1}{4}V_{1,1} + V_{1,2} - \frac{1}{4}V_{2,2} &= \frac{1}{4}(V_1 + V_2) \\ -\frac{1}{4}V_{1,1} + V_{2,1} - \frac{1}{4}V_{2,2} &= \frac{1}{4}(V_3 + V_4) \\ -\frac{1}{4}V_{1,2} - \frac{1}{4}V_{2,1} + V_{2,2} &= \frac{1}{4}(V_2 + V_3) \end{aligned}$$

que en forma matricial asume el aspecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{2,1} \\ V_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} V_1 + V_4 \\ V_1 + V_2 \\ V_3 + V_4 \\ V_2 + V_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

y resolvemos:

$$\begin{pmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \\ V_{2,1} \\ V_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_1 + V_4 \\ V_1 + V_2 \\ V_3 + V_4 \\ V_2 + V_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

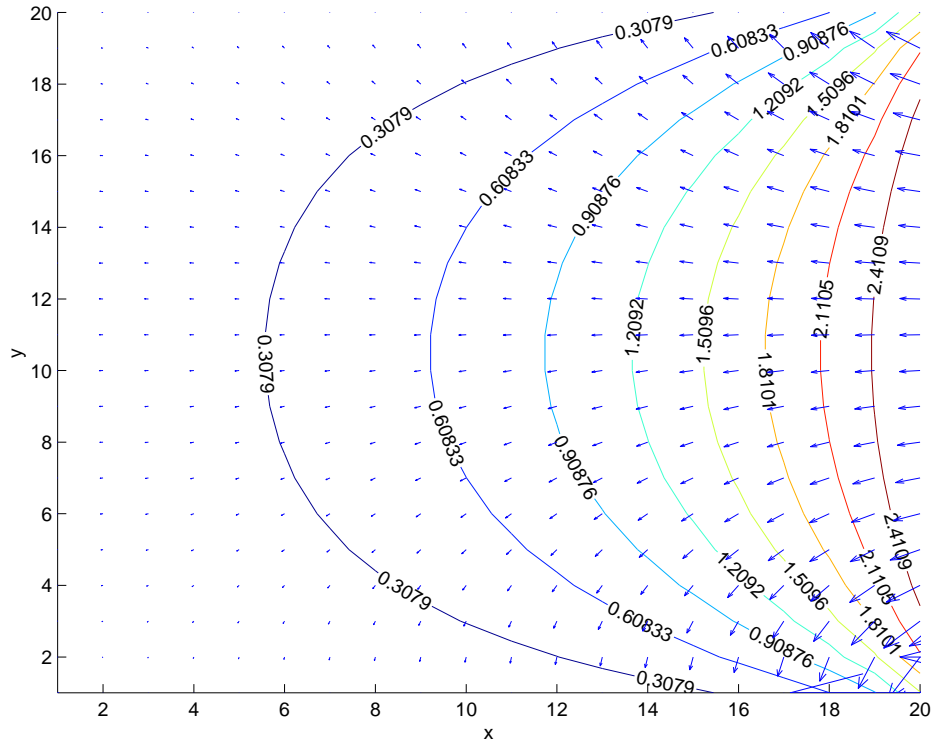
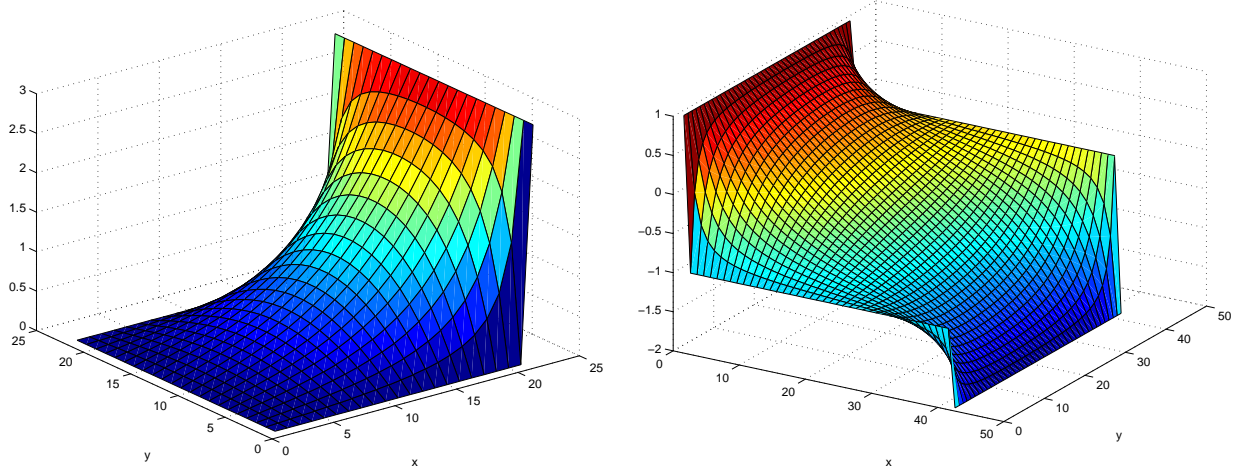


Figura 4: Curvas equipotenciales y líneas de fuerza de \mathbf{E} estimadas con el método FD usando 20 puntos con $V_1 = 0$, $V_2 = 3$, $V_3 = 0$, y $V_4 = 0$.

Obviamente cuatro puntos no son suficientes para obtener una buena aproximación $V_{i,j} = V(x_i, y_j)$ de la solución $V(x, y)$. Con la ayuda de MATLAB [6] hemos estimado $V(x, y)$ y $\mathbf{E}(x, y)$ usando 20 puntos para $V_1 = 0$, $V_2 = 3$, $V_3 = 0$, y $V_4 = 0$ –ver figuras 4 y 5(a)–.

En las figuras 5(b) y 6 se ilustran los resultados obtenidos usando 40 puntos con $V_1 = -1$, $V_2 = -2$, $V_3 = 0$, y $V_4 = 1$.



(a) $V(x, y)$ estimado usando 20 puntos y $V_1 = 0$, $V_2 = 3$, $V_3 = 0$, y $V_4 = 0$.

(b) $V(x, y)$ estimado usando 40 puntos y $V_1 = -1$, $V_2 = -2$, $V_3 = 0$, y $V_4 = 1$.

Figura 5: Aplicación del método de las diferencias finitas al problema (22).

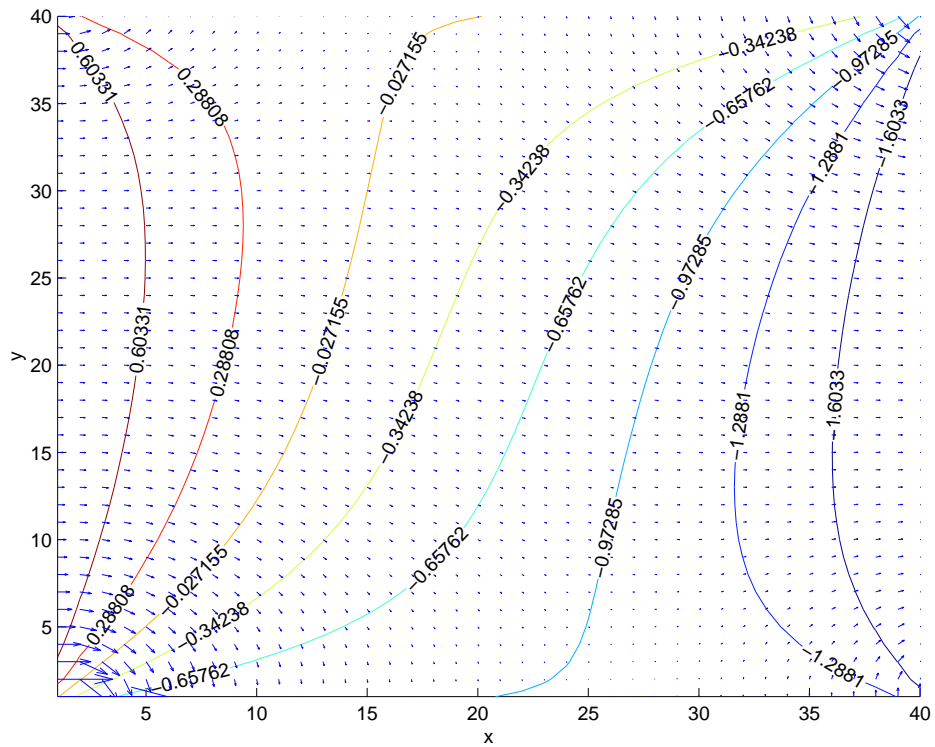


Figura 6: Curvas equipotenciales y líneas de fuerza de E estimadas con el método FD usando 40 puntos con $V_1 = -1$, $V_2 = -2$, $V_3 = 0$, y $V_4 = 1$.

A. Secciones cónicas

La ecuación general de las curvas cónicas es:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0 \quad (26)$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Bajo una apropiada rotación podemos obtener una nueva ecuación:

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \quad (27)$$

y en particular forzar $B' = 0$:

$$A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \quad (28)$$

Completando el cuadrado² [7] podemos reescribir la ecuación (28) de la forma:

$$\begin{aligned} A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' &= 0 \\ A' \left(x + \frac{D'}{2A'} \right)^2 + \left(\frac{F'}{2} - \frac{D'^2}{4A'} \right) + C' \left(y + \frac{E'}{2C'} \right)^2 + \left(\frac{F'}{2} - \frac{E'^2}{4C'} \right) &= 0 \quad (29) \\ A'x'^2 + C'y'^2 &= H \end{aligned}$$

donde $x' = x + D'/2A'$, $y' = y + E'/2C'$, y $H = D'^2/4A' + E'^2/4C' - F'$.

Cuadro 1: Formas estándares de las secciones cónicas y su comparación con la ecuación $A'x'^2 + C'y'^2 = H$.

<i>elipse</i>	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	$\alpha^2 = \frac{H}{A'}, \beta^2 = \frac{H}{C'}$	$\alpha^2\beta^2 > 0 \rightarrow A'C' > 0$
<i>hipérbola</i>	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ó $-\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	$\alpha^2 = \pm \frac{H}{A'}, \beta^2 = \mp \frac{H}{C'}$	$\alpha^2\beta^2 < 0 \rightarrow A'C' < 0$
<i>parábola</i>	$x^2 = \alpha y$ ó $y^2 = \alpha x$	$C' = D' = F' = 0, \alpha = -\frac{E'}{A'}$ ó $A' = E' = F' = 0, \alpha = -\frac{D'}{C'}$	$\alpha^2\beta^2 = 0 \rightarrow A'C' = 0$

De la comparación de la ecuación (29) con las formas estándares de las secciones cónicas [8] que se muestran en el cuadro 1, podemos concluir acerca del tipo de cónica representada por la mencionada ecuación mediante el siguiente criterio [9]:

²

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) \\ &= a(x + B)^2 + C \end{aligned}$$

donde: $B = b/2a$ y $C = c - b^2/4a$.

$$\begin{aligned}
A'C' > 0 & \quad \text{elipse} \\
A'C' < 0 & \quad \text{hipérbola} \\
A'C' = 0 & \quad \text{parábola}
\end{aligned}$$

Ahora bien, ya que el determinante³ de la matriz de la ecuación (26) es invariante ante cualquier rotación del sistema de referencia [9]:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} \\
AC - B^2 &= A'C' - B'^2 \\
AC - B^2 &= A'C'
\end{aligned} \tag{30}$$

podemos extender el criterio anterior a la ecuación más general (26):

$$\begin{aligned}
\text{si } A'C' = AC - B^2 > 0 & \quad \text{la ecuación 26 representa una elipse} \\
\text{si } A'C' = AC - B^2 < 0 & \quad \text{la ecuación 26 representa una hipérbola} \\
\text{si } A'C' = AC - B^2 = 0 & \quad \text{la ecuación 26 representa una parábola}
\end{aligned}$$

³El negativo de este determinante se conoce como *discriminante*.

B. Series de Taylor

Dada la función $f = f(x)$ de la variable x la cual posee derivadas de cualquier orden en cierto intervalo $[a, b]$, para todo $x, x_0 \in [a, b]$, se cumple que:

$$\int_{x_0}^x f'(x) \, dx = f(x) - f(x_0) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f''(x) \, (dx)^2 &= \int_{x_0}^x f'(x)|_{x_0}^x \, dx \\ &= \int_{x_0}^x [f'(x) - f'(x_0)] \, dx \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f'''(x) \, (dx)^3 &= \int_{x_0}^x f''(x)|_{x_0}^x \, (dx)^2 \\ &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x [f''(x) - f''(x_0)] \, (dx)^2 \\ &= \int_{x_0}^x [f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)] \, dx \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Y la integral repetida $n + 1$ veces de la derivada de orden $n + 1$ de $f(x)$ arroja:

$$\underbrace{\int \dots \int_{x_0}^x}_{n+1} f^{(n+1)}(x) \, (dx)^{n+1} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (34)$$

De la ecuación (34) se puede escribir el valor de la función f en x a partir del valor de f y sus derivadas en x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\quad + \underbrace{\int \dots \int_{x_0}^x}_{n+1} f^{(n+1)}(x) \, (dx)^{n+1} \end{aligned} \quad (35)$$

Serie que se conoce como serie (unidimensional) de Taylor.

Una expresión más compacta de la serie (35) se obtiene poniendo:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}}{k!} (x - x_0)^k + R_n \quad (36)$$

donde el residuo R_n viene dado por la expresión

$$R_n = \underbrace{\int \dots \int_{x_0}^x}_{n+1} f^{(n+1)}(x) (dx)^{n+1} \quad (37)$$

el cual, en virtud del teorema del valor medio [10], vale:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (38)$$

donde $\xi \in [x, x_0]$.

Referencias

- [1] Kane S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 3, pp. 302–307, May 1966.
- [2] Eric W. Weisstein, “Taylor series,” *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html>, 2004.
- [3] William H. Hayt, *Teoría Electromagnética*, Mc. Graw Hill, 5 edition, 1994.
- [4] Hermann A. Haus and James R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy*, Prentice Hall, 1989.
- [5] David R. Kincaid and David M. Young, “A tutorial on finite difference methods and ordering of mesh points,” in *Fall Joint Computer Conference Proceedings*, H. S. Stone and S. Winkler, Eds., pp. 556–559. 1986.
- [6] Duane Hanselman and Bruce Littlefield, *The Student Edition of MATLAB, version 5, user’s guide*, The MATLAB curriculum series. Prentice-Hall, Inc., 1997.
- [7] Eric W. Weisstein, “Completing the square,” *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/CompletingtheSquare.html>, 2004.
- [8] Steven J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA., 5 edition, 1998.
- [9] Eric W. Weisstein, “Quadratic curve discriminant,” *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurveDiscriminant.html>, 2004.
- [10] Eric W. Weisstein, “Mean-value theorem,” *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/Mean-ValueTheorem.html>, YEAR = 2004,.